3 L'EXTRACTION DES ANTICIPATIONS DES ACTEURS DU MARCHÉ À PARTIR DES PRIX DES OPTIONS

Par Abdelaziz Rouabah* et Philippe Arondel**

I) INTRODUCTION

L'information véhiculée par les prix des actifs financiers est souvent exploitée par les autorités monétaires et les acteurs des marchés afin d'analyser les évolutions potentielles de la sphère économique ainsi que la sphère financière. De multiples raisons en lien avec la politique monétaire, mais aussi avec la stabilité financière expliquent l'intérêt des banques centrales pour cette catégorie d'information.

En effet, les mouvements des prix des actifs financiers, à la hausse comme à la baisse, affectent la richesse des ménages. Les ajustements de la consommation qui découleront peuvent entraîner des modifications de l'environnement économique dans son ensemble. De plus, il est vraisemblable que les fluctuations des prix des actifs financiers affectent les conditions de financement des entreprises. Dans la mesure où un changement abrupt des prix des actifs financiers peut se traduire par de larges pertes des institutions financières, conduisant à une probable installation d'une fragilité du système financier, les banques centrales accordent un intérêt particulier au mouvement des prix de ces actifs. Autrement dit et afin de préserver la stabilité financière, il est important pour les autorités monétaires d'étudier les risques du marché à travers l'extraction et l'analyse ponctuelle des anticipations des acteurs. Dans ce cadre, les prix des produits dérivés et en particulier ceux des options[191] représentent une source informationnelle unique pour l'extraction des attentes des investisseurs. Etant donné que le rendement d'une option dépend des évolutions futures de l'actif sous-jacent, les prix des contrats sur options reflètent les probabilités attribuées par ces investisseurs quant au rendement futur du dit contrat. Par conséquent, l'étude des prix des options à échéance identique et afférents au même actif sous-jacent avec de multiples prix d'exercice permettrait de construire la distribution des prix futurs telle qu'elle est perçue par le marché.

D'un point de vue empirique, l'analyse des mouvements des prix des actifs est souvent basée sur l'estimation de la fonction de densité (PDF). Cette dernière permet de quantifier la probabilité associée à un niveau de prix donné. Dans ce cadre, les prix des actifs sont modélisés comme étant les rendements anticipés, calculés soit sur la base de leur probabilité statistique objective, soit sur celle d'une probabilité neutre au risque (RND), qui est déterminée sans aucune référence aux préférences des investisseurs[192]. Il y a lieu de noter que la probabilité statistique est estimée souvent de manière paramétrique à partir des données historiques relatives aux prix des actifs. Quant à l'estimation de la densité neutre au risque, elle est basée sur des données en panel afférents aux prix journaliers des options. Cette dernière approche s'appuie sur le concept de la volatilité implicite relative au prix des options[193] pour modéliser les probabilités que les investisseurs attribuent à l'ensemble des prix possibles de l'actif sous-jacent. De plus, la distribution neutre au risque présente des caractéristiques spécifiques qui s'expliquent par l'intégration du troisième (asymétrie) et du quatrième (aplatissement) moments de la distribution. L'intégration du troisième moment permet la prise en compte de l'asymétrie autour de la moyenne des anticipations des intervenants sur le marché des options. Quant au quatrième moment issu de la distribution neutre au risque, il illustre les anticipations des investisseurs relatives aux changements extrêmes des prix du sous-jacent.

* Département Stabilité Financière.
** Département Statistique.

191 Une option est un contrat qui confère le droit et non l'obligation à son détenteur d'acheter ou de vendre, selon qu'il s'agit d'une option d'achat ou de vente, une quantité prédéfinie d'un actif financier à un prix et à une échéance fixés à l'avance.

192 Cette dernière méthode demeure l'outil essentiel de la valorisation des options. Elle résulte de l'une des propriétés de l'équation des dérivées partielles du modèle d'évaluation des options de Black-Scholes. Cette équation ne fait intervenir aucune variable affectée par le degré d'aversion au risque des investisseurs. Autrement dit, elle est complètement indépendante des préférences des investisseurs en matière de risque (vor Hull, 2004).

193 La volatilité implicite est une estimation par le marché de la variabilité future des prix de l'actif sous-jacent au cours de la vie de l'option. Contrairement à la volatilité historique, la volatilité implicite ne se déduit pas des données passées. Elle est calculée en inversant la formule de Black-Sholes, ce qui lui permet d'avoir un contenu prospectif.

De ce qui précède, il semble que l'information afférente aux anticipations des investisseurs et qui est contenue dans les prix des options est beaucoup plus riche que celle véhiculée par les prix historiques des actifs. Le but de la présente étude consiste en la dérivation de la fonction de densité neutre au risque à partir des prix des options dont les sous-jacents sont l'indice boursier européen DJ Euro Stoxx 50 et l'indice des valeurs bancaires apparenté à l'indice DJE Eurostoxx 300. Dans ce cadre et pour extraire les anticipations des acteurs du marché sur les évolutions futures des mouvements de l'indice précité, nous adoptons une mixture de deux distributions log-normales ainsi qu'une méthode complémentaire basée simplement sur une distribution log-normale. Nous construisons des distributions neutres au risque pour un horizon constant de 45 jours à partir de la cotation journalières des options dites européennes.

II) MÉTHODOLOGIE ET ESTIMATIONS EMPIRIQUES

Une option est un contrat qui confère le droit et non l'obligation à son détenteur d'acheter ou de vendre, selon qu'il s'agit d'une option d'achat (call) ou de vente (put), une quantité prédéfinie d'un actif financier à un prix convenu à l'avance (appelé prix d'exercice) et à une échéance fixée. Pour les options dites européennes, la décision d'exercer ou de ne pas exercer ce droit ne peut avoir lieu qu'à la fin de l'échéance du contrat. Tandis que pour une option américaine, ce droit d'exercice peut intervenir à n'importe quel moment de l'intervalle de la durée de vie du contrat. Il existe différents types d'options. Elles se différencient par l'actif sous-jacent, qui peut être une action, un indice boursier, une obligation, une devise, un contrat à terme,…. Cependant, la caractéristique principale d'une option est relative à son degré de liquidité, défini comme étant le rapport entre son prix d'exercice et la valeur actuelle du marché de l'actif sur lequel elle porte. Trois catégories de degrés de liquidité peuvent être distinguées. Une option est classée en dehors de la monnaie dans le cas où si elle était exercée immédiatement, elle générerait un flux négatif. De la même manière, une option serait dans la monnaie si son exercice se traduirait par un flux de trésorerie positif. Enfin, une option est à parité dans l'hypothèse où son exercice immédiat engendrerait pour le détenteur un flux nul.

Le fait le plus important à noter est relatif au prix théorique de l'option. Dans ce cadre, la théorie financière nous enseigne que le prix d'une option d'achat (call) européenne est défini comme étant :

$$\begin{aligned} c(S,X,T,r,q,\sigma) &= e^{-rT}\left[\max(S-X;0)\right] \\ &= e^{-rT}\int_X^{\infty}(S-X)f(S)dS \end{aligned} \quad (1)$$

Avec :
C(.) : le prix de l'option d'achat européenne (call) ;
S: le prix de l'actif sous-jacent ;
X : le prix d'exercice ;
T : temps restant à écouler jusqu'à l'échéance annualisé ;
f(S) : la fonction de densité neutre au risque afférente au prix de l'actif sous-jacent ;
(r) : taux d'actualisation (taux d'intérêt sans risque)
(q) est le rendement apparent du sous-jacent.
(σ) est la volatilité du rendement de l'actif sous-jacent

Ainsi, la valeur de l'option d'achat européenne est déterminée par l'espérance mathématique actualisée au taux d'intérêt sans risque de la valeur intrinsèque de l'option à l'échéance, c'est-à-dire de la différence entre le cours de l'actif sous-jacent à l'échéance et le prix d'exercice. Dans la pratique, l'évaluation des options par les acteurs du marché fait appel à la probabilité associée à différents états futurs du prix du sous-jacents jusqu'à la date d'échéance. En d'autres termes, la perception des acteurs du marché relative aux mouvements des prix de l'actif est reflétée par l'incorporation de la densité des probabilités *[f(S)]* dans le processus d'évaluation des options. Par conséquent, les prix des options observés sur le marché contiennent des informations sur la perception des investisseurs quant à l'évolution des prix de l'actif sous-jacent. Dans notre cas, les options portent sur l'indice européen DJ Euro Stoxx 50 (SX5E) et sur l'indice Euro Stoxx Banks (SX7E).

II.1) LE MODÈLE DE BLACK & SHOLES

Le modèle de Black et Scholes est une spécification fréquemment utilisée par les professionnels pour évaluer les options. Ce modèle a été élaboré par analogie au phénomène physique de diffusion de la chaleur. En théorie financière la formule de Black et Sholes est basée sur l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage dans un environnement de risque-neutre. Elle assume, par ailleurs, que la dynamique des prix de l'actif sous-jacent suit un processus Brownien géométrique. Dans ce contexte, le rendement du dit actif suit une loi normale et le prix théorique d'une option d'achat européenne y afférente s'écrit :

$$c(S, X, T, r, q, \sigma) = Se^{-qT} N(d1) - Xe^{-rT} N(d2) \quad (2)$$

avec :

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

N(.) représente la densité cumulée de la loi normale.

Dans l'hypothèse où les prix à termes de l'actif sous-jacent sont dictés par un processus de diffusion log-normal et en l'absence d'opportunité d'arbitrage, les formulations précédentes peuvent être simplifiées en substituant Se^{-qT} par Fe^{-rT}. En introduisant cette substitution dans l'expression (2), on aboutit à l'expression suivante:

$$c(F, X, T, r, \sigma) = Fe^{-rT} N(d1) - Xe^{-rT} N(d2)$$

Avec :

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{X}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

(F) est le prix à terme de l'actif sous-jacent, tandis que (σ) représente la volatilité de celui-ci. Cette formulation permet l'évaluation d'un call européen. Elle repose sur cinq paramètres dont quatre sont observables *(F, X, T, r)*. Etant donné que la volatilité demeure l'unique variable inobservée, le prix d'un call peut être exprimé comme fonction de la volatilité. Ainsi, la volatilité se présente comme étant le paramètre le plus important pour la détermination du prix d'une option et son estimation conditionne le degré de précision de l'évaluation de celle-ci. Il y a lieu de noter que si la formule de Black & Scholes était parfaitement valide, la volatilité implicite serait la même quel que soit le prix d'exercice considéré. Cependant, de multiples travaux empiriques ont révélé que la volatilité implicite des options européennes est dépendante du prix d'exercice de l'option et de sa durée résiduelle. Pour une maturité donnée, la représentation de la volatilité implicite en fonction des prix d'exercice affiche une forme convexe plutôt qu'une droite horizontale, telle que postulé par le modèle de Black & Scholes. Une telle découverte est qualifiée dans la littérature financière de « volatility smile ». Cette dernière s'explique par une volatilité implicite des options en dehors de la monnaie plus forte que celles afférentes aux options à parité et/ou dans la monnaie. Autrement dit, la volatilité smile traduit le fait que les options qui sont en dehors de la monnaie sont valorisées par le marché avec un prix plus élevé que celui issus d'un processus brownien géométrique adopté par Black & Scholes.

L'existence d'une telle divergence traduit le fait que les acteurs du marché accordent une probabilité plus élevée à des valeurs éloignées de la tendance centrale que celle d'une distribution log-normale.

La mise en cause de la pertinence du modèle log-normal s'est traduite par l'émergence d'autres modèles qui présupposent soit un processus différent du processus Brownien géométrique pour caractériser l'évolution des prix de l'actif sous-jacent, soit l'adoption, ex-ante, d'une forme de distribution de probabilité du prix compatible avec l'asymétrie et l'aplatissement de la distribution neutre au risque. Parmi la première catégorie de modèles, en l'occurrence les spécifications paramétriques, on y trouve les modèles dits à volatilité stochastique[194]. Dans ce cadre, il y a lieu de noter que ces modèles sont handicapés par la complexité de la spécification du processus stochastique, mais aussi par la multiplication du nombre de paramètres à estimer. Quant aux modèles de la seconde catégorie, basés à leur tour, sur le choix ex-ante d'une distribution de probabilités, ils permettent de réduire considérablement les paramètres à estimer. Dans cette catégorie de modèles, la mixture de deux densités log-normales introduite par Melick et Thomas (1997), demeure l'approche la plus répandue pour l'estimation de la densité neutre au risque. Il y a lieu de souligner que la mixture de lois permet la prise en compte de la non-normalité des processus afférents aux prix des actifs financiers.

La mixture de deux distributions log-normales peut être décrite par cinq paramètres : deux paramètres pour chaque distribution (m_1, v_1 et m_2, v_2) et un paramètre de pondération (θ) reflétant le poids attribué à chaque distribution de probabilité. La densité log-normale neutre au risque issue de la mixture de deux lois log-normales peut être formulée ainsi :

$$f(S_T) = \theta.\left(LogN\left(S_T \middle| m_1, v_1\right)\right) + (1-\theta)\left(LogN\left(S_T \middle| m_2, v_2\right)\right)$$

Avec : $m_i = \ln S_0 + \left(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right).\tau$

$$v_i = \sigma_i \sqrt{\tau}$$

Où :
S_0 est le prix courant de l'actif sous-jacent ;
m_i, v_i : les moyennes et les variance des distributions normales ;
θ est le poids attribué à chacune des deux distributions log-normales ($0 \leq \theta \leq 1$) ;

Intuitivement, l'adoption d'une mixture de lois de probabilité par les acteurs de marché est synonyme d'anticipation par ces derniers de configurations différentes sur l'évolution des prix de l'actif sous-jacents auxquelles ils attribuent une probabilité θ et *(1- θ)*. Autrement dit, l'évolution des l'actifs serait potentiellement dictée par deux dynamiques dont les dérives et la volatilité sont, respectivement (*μ1*, *μ2*) et (*σ1*, *σ2*). L'estimation de la densité neutre au risque est fondée sur le principe de non arbitrage de Breeden et Litzenberg (1978), c'est-à-dire qu'elle est obtenue à partir de la seconde dérivée du prix de l'option par rapport à son prix d'exercice, telle que :

$$f(S_T) = e^{-rT} \frac{\partial^2 C(S,T,X,r,q,\sigma)}{\partial X^2}$$

194 Les modèles GARCH sont un outil pour la modélisation et l'estimation de la densité conditionnelle.

Or, il s'avère que les options ne sont échangées que pour un ensemble de prix d'exercice limité du sous-jacent. Différentes méthodes coexistent pour remédier à cette difficulté. Parmi ces dernières, on y trouve soit le recours à des approximations numériques de cette seconde dérivée, soit l'estimation des paramètres de la fonction de densité neutre au risque par l'intermédiaire de la minimisation de l'écart quadratique entre le prix théorique de l'option et le prix observé. Dans ce cadre, l'une des approximations suggérées dans la littérature empirique s'exprime ainsi[195]:

$$\frac{\partial^2 C(S,T,X,r,q,\sigma)}{\partial X^2} \approx \frac{C(X_{i+1})-C(X_i)}{X_{i+1}-X_i} - \frac{C(X_i)-C(X_{i-1})}{X_i - X_{i-1}} / \left[\frac{1}{2}(X_{i+1}-X_{i-1})\right]$$

Quant à la minimisation de la divergence du prix théorique et le prix du marché,

elle s'écrit : $\min_{m1,v1,m2,v2,\theta} \sum_i^n \left(\hat{C}_{i,t} - C_{i,t}\right)^2$

II.2) LES DONNÉES UTILISÉES ET LES RÉSULTATS EMPIRIQUES

Les données exploitées pour inférer les densités neutres au risque couvrent la période de l'année 2007. Ce sont des cotations quotidiennes d'options européennes dont les sous-jacents sont l'indice eurostoxx 50 et l'indice des valeurs bancaires européennes apparenté à l'indice DJE eurostoxx 300. Sur ces deux marchés, l'expiration des options se manifeste chaque troisième vendredi du mois. De plus, différentes maturités allant d'une journée jusqu'à quatre ans sont traitées. Toutefois, afin d'éliminer l'effet du délai d'expiration, les estimations devraient s'appuyer sur des options à maturité constante. Ainsi, seules les échéances de 45 jours ouvrables sont considérées dans l'inférence des fonctions de densités neutre au risque. Les prix d'exercice de ces options couvrent un intervalle allant 3400 à 5000 pour l'indice eurostoxx 50 et de 370 à 530 pour l'indice des valeurs bancaires avec des accroissements respectifs de 50 et 10 points. La comparaison de ces densités de probabilité nous donne une description des anticipations des acteurs, à une date donnée, sur les évolutions des prix des actifs sous-jacents en l'occurrence les anticipations à 45 jours. Quant au taux d'intérêt sans risque adopté pour les estimations de ces densités de probabilité, il s'agit du taux Euribor à 2 mois.

Le logiciel Gauss et son module d'optimisation sous-contrainte furent utilisés pour la minimisation de l'écart quadratique entre le prix théorique et le prix du marché de l'option. Les estimations sont réalisées à trois dates différentes pour les options sur l'indice eurostoxx 50 et pour l'indice des valeurs bancaires.

Les graphiques ci-après présentent les estimations des fonctions de densités selon les deux méthodologies décrites précédemment, en l'occurrence la loi log-normale et la mixture de lois. Plusieurs points sont importants à souligner. Contrairement au modèle log-normal qui ne met en évidence aucune asymétrie pour les trois densités estimées, on observe clairement l'asymétrie et la bi-modalité de la densité neutre estimée avec deux mixtures de lois log-normales, en pleine turbulence du mois d'août du marché de crédits à risque « subprime ». Cette distribution est caractérisée par une queue de distribution plus épaisse, qui traduit particulièrement le déplacement à gauche de la masse centrale de la densité en question. Il est à noter que les estimations révèlent que la moyenne des densités neutres estimées par une mixture de lois log-normales oscille entre 4218 et 4452 points. La moyenne de la distribution du mois d'août est inférieure de 234 points comparativement à la distribution du mois de juillet. Cet écart est réduit à 100 points en septembre, reflétant ainsi le tassement relatif des incertitudes du marché en septembre. La distribution cumulative des probabilités neutres au risque du mois de septembre affiche une probabilité de 0.435 pour

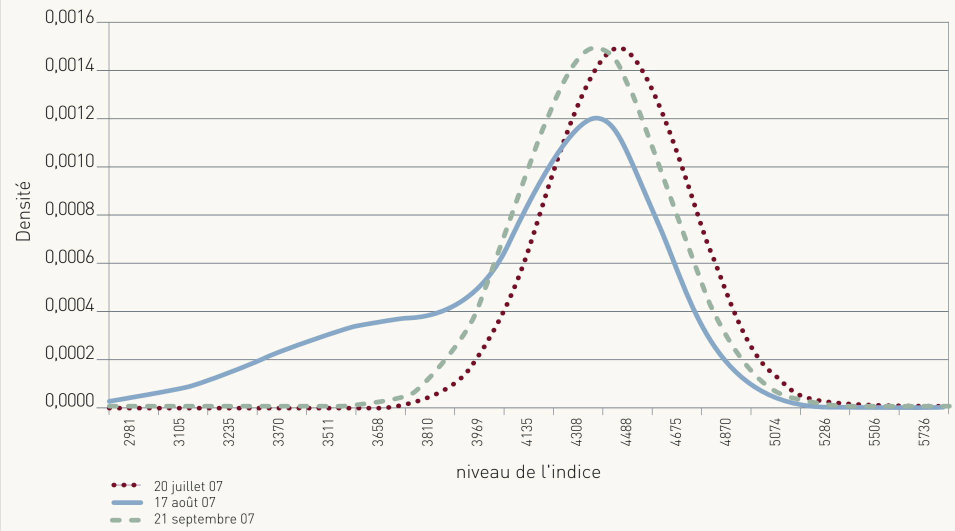
195 Voir P. Söderlind et L.E.O. Svensson, 1996.

que le niveau d'indice soit, tout au plus, égal à au premier moment de la distribution neutre au risque du mois de juillet (4452,33 points). En d'autre terme, les acteurs du marché attribuent une probabilité de 0.565 pour une valeur plus élevée que la moyenne précitée.

L'allocation de probabilité entre les queues de la distribution et le centre a changé considérablement entre le 20 juillet et 17 août de l'année 2007. Par conséquent, l'écart entre les percentiles à 5% et à 95% fut relativement faible au mois de juillet comparativement à celui du mois d'août. L'accroissement de cet intervalle au mois d'août reflète la progression de l'incertitude du marché quant à l'évolution de l'indice boursier. Autrement dit, les acteurs du marché anticipent une étendue plus vaste quant à l'évolution des valeurs de l'indice eurostoxx 50. De plus, la bi-modalité de la densité neutre estimée pour le mois d'août laisse présager que les acteurs du marché attribuent une probabilité plus élevée à un scénario plus pessimiste dans lequel la valeur de l'indice serait inférieure à 3800 points.

Graphique 51

Les densités neutres au risque (mixture de log-normales)

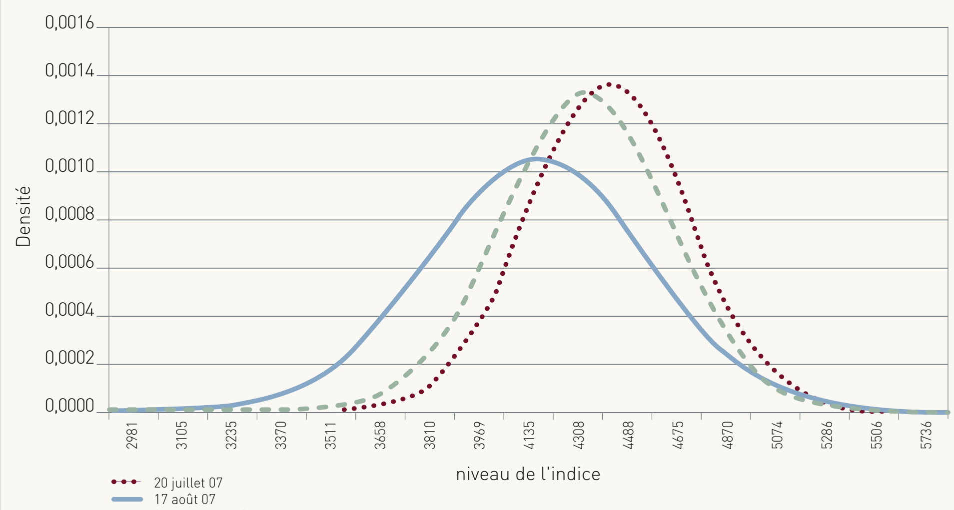


Source: BCL

Concernant les écarts de résultats entre les deux méthodes utilisées pour l'estimation des densités neutres au risque, les graphiques révèlent que les résultats sont relativement proches. Toutefois, les deux méthodes génèrent des différences en matière d'allocation de la masse des probabilités, en particulier en ce qui concerne les densités du mois d'août.

Graphique 52

Les densités neutres au risque (log-normales)

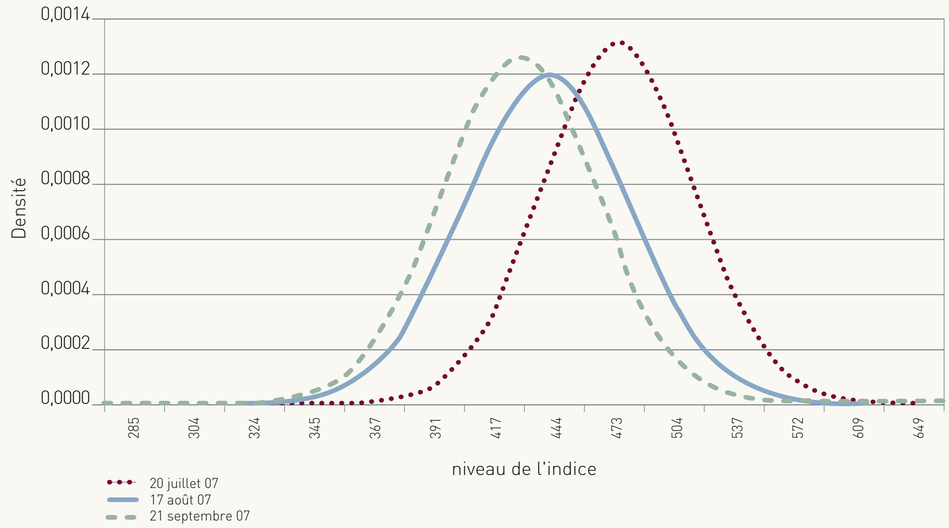


Source: BCL

S'agissant des densités neutres estimées à partir des options dont le sous-jacent est l'indice des valeurs bancaires européennes, les deux méthodes de mesure affichent des résultats très proches. De plus, l'asymétrie des distributions des densités neutres au risque issues de l'indice des valeurs bancaire est moins prononcée que celle observée pour l'indice eurostoxx 50. Le graphique 53 révèle que les moyennes des distributions du mois d'août et de septembre sont inférieures, respectivement, de 40 et de 42 points par rapport à celle du mois de juillet. L'écart en valeur absolue demeure faible comparativement à celui observé pour l'indice eurostoxx 50. Néanmoins, la valeur relative de cet écart indique que les acteurs du marché anticipaient une chute conséquente de l'indice des valeurs bancaires européennes de plus de 8% par rapport à sa valeur anticipée au mois de juillet. Il peut être utile de noter que la valeur de cet écart est une indication à l'implication «plus au moins importante» des banques faisant partie de cet indice boursier dans la crise du sub-prime.

Graphique 53

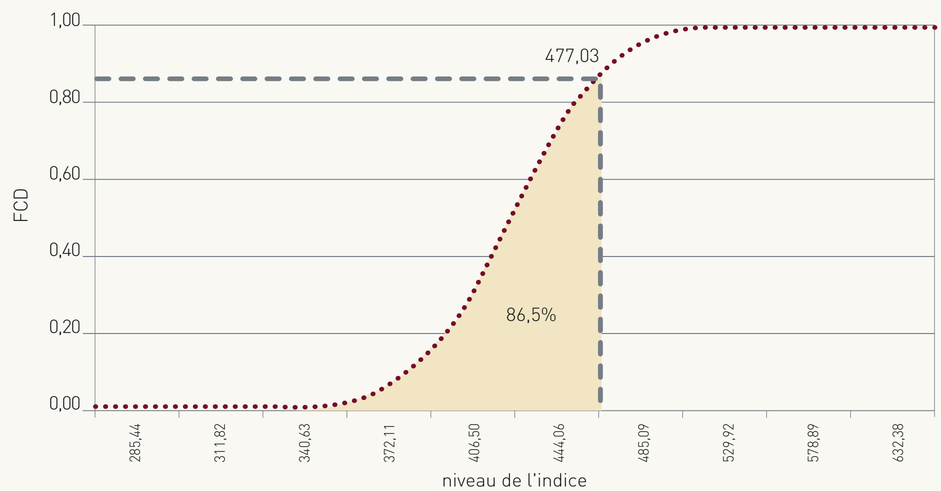
Les densités neutres au risque des valeurs bancaires (mixture de log-normales)



Source: BCL

Graphique 54

La fonction de distribution cumulative (21 septembre 2007)



Source: BCL

Compte tenu de la persistance des perturbations issues de cette crise du sub-prime et qui agitent l'économie bancaire internationale, il serait opportun de s'interroger sur l'importance de la probabilité que les investisseurs attribuent pour un retour à une situation « normale » durant les deux mois à venir, où le niveau de l'indice des valeurs bancaires européennes soit supérieur ou égal à celui observé avant la crise du mois d'août 2007. A cet égard, la distribution cumulative des probabilités du mois de septembre (voir graphique 54) révèle que les investisseurs attribuent une probabilité relativement faible (0.135) à la réalisation d'un tel scénario. Autrement, ils jugent avec une probabilité de 0.865 que le niveau de l'indice des valeurs bancaires européennes demeurerait inférieur à la valeur de 477.03 points au cours des 45 jours à venir.

III) CONCLUSION

Dans cette contribution, nous mettons en œuvre deux méthodes d'extraction des densités neutres au risque. Pour différentes dates nous avons appliqué ces deux méthodes à des données relatives aux prix des options européennes dont les sous-jacents sont l'indice eurostoxx 50 et celui des valeurs bancaires, apparenté à l'indice DJE eurostoxx 300. Les différences de résultats entre les deux méthodes demeurent très marginales en période « normale ». Cependant, en période de turbulence ou d'incertitude sur les marchés, l'estimation de densité fondée sur un mélange de densités log-normales permet une meilleure évaluation des prix des options.

La considération de la date du 17 août 2007, jour de turbulence sur les marchés dû à la crise du sub-prime dans les estimations de densités neutres au risque révèle que ces dernières se caractérisent par un étalement plus important que celles estimées pour dates antérieures. Ce résultat reflète l'accroissement de l'incertitude du marché quant à l'évolution future des indices boursiers en question. Toutefois, l'anticipation de la baisse, en particulier de l'indice des valeurs bancaire, par les acteurs du marché demeure relativement importante. En effet, la comparaison des moyennes des trois densités laissent présager une baisse anticipée de cet indice de plus de 8% comparativement à la valeur affichée par cet indice en juillet.

Il semble utile, par ailleurs, de préciser que la disponibilité de ces informations pour les banques centrales serait un facteur d'enrichissement du contenu de l'information prospective nécessaire à la conduite de la politique monétaire. Ceci est d'autant plus vrai que la variabilité temporelle des moments de la densité neutre au risque est une indication pertinente sur l'évolution de la perception et des anticipations des acteurs du marché.

BIBLIOGRAPHIE

Bahra, B. (1997): Implied Risk-Neutral Probability Density Functions From Option Prices: Theory and Application, Bank of England, Working Paper n° 66.

Breeden, D. and R. Litzenberger (1978): Prices of States Contingent Claims Implicit in Options Prices, Journal of Business, n° 51, pp. 621-651.

Glatzer, E. and M. Scheicher (2003): Modelling the Implied Probability of Stock Market Movements, European Central Bank, Working Paper Series n° 212.

Hull, J. (2004) : Options, futures et autres actifs dérivés, édition. française dirigées par P. Roger et al., 5ème édition, Pearson Education France éd.

Jondreau, E. et M. Rockinger (1997): Estimation et interprétation des densités neutres au risqué : une comparaison de méthodes, Banque de France, Notes d'Etudes et de Recherche.

Melick, W. R. and C.P. Thomas (1997): Recovering an Asset's Implied PDF From Options Prices: an Application to Crude Oil During the Gulf Crisis, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 32, n° 1, pp. 91-115.

Syrdal, S. A. (2002): A study of Implied Risk-Neutral Density Functions in Norwegian Option Market, Norges Bank, Working paper n°13.

Taylor, S. J. (2005): Asset price dynamics, volatility, and prediction, Princeton University Press.